

## 1.-SUAVIZADORES DE RANGO DE ORDEN

### 1.1.- INTRODUCCIÓN

Considerando que el "filtro mediana" es no-lineal, el término "filtro", que ha sido implícitamente asociado con el concepto de linealidad, es inapropiado. Quedaría mejor definido como "suavizador".

En el suavizador de mediana, sabemos que sus propiedades más notorias son su habilidad a suavizar mientras se preservan los bordes y su habilidad a pasar entradas monótonas sin cambios. A continuación, nos centraremos en uno de ellos, que es el suavizador de rango de orden y cuyas principales características son:

Primero, está definida vía minimización de alguna función objetiva.

Segundo, ofrece mejoras de ruido en canales vacíos y en las características en respuesta al impulso en comparación a los suavizadores mediana de propiedades comparables al pulso rectangular.

Tercera, esta clase, en una versión, ofrece operación recursiva. Esto tiene importantes implicaciones en la configuración de hardware de cualquier aplicación dedicada al algoritmo de suavizado en cuestión. En particular, impacta en el susurro del rasgo sistólico para implementaciones VLSI.

Cuarta, y quizás la más importante, la presente clase hace estimaciones basadas enteramente en el rango y en determinaciones de ordenes temporales. No se requieren multiplicaciones y salvo casos muy excepcionales, tampoco requieren sumas.

Los precedentes más notable pueden ser expresados, alternativamente, diciendo que cada valor de salida es uno de los valores de entrada, elegidas mediante alguna determinación de rango de orden. Una característica de muchos suavizadores es que existe en principio, implementaciones que requieren un mínimo número de operadores aritmético.

### 1.2.- FUNCIÓN OBJETIVA

Si consideramos a la salida en un tiempo  $n$  de la mediana como

$$y_n = med(x_{n-N}, x_{n-N+1}, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

La media será el valor máximo  $y_n$  de  $v$  que minimiza

$$\sum_{k=0}^N |v - x_{n-k}|$$

Como generalización de esta función objeto se propone:

$$F(v, x) \triangleq \sum_{k=0}^n [f[v_k - x_k] + g[v_k]] + \sum_{k=1}^n h[v_{k-1} - v_k]$$

donde  $v = \{v_0, v_1, \dots, v_n\} \in E_{n+1}$ ,  $x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in E_{n+1}$ , y  $E_{n+1}$  es un espacio euclideo de dimensión  $n+1$ . Las funciones  $f, g, h$  son lineales a tramos y convexas (PLC).

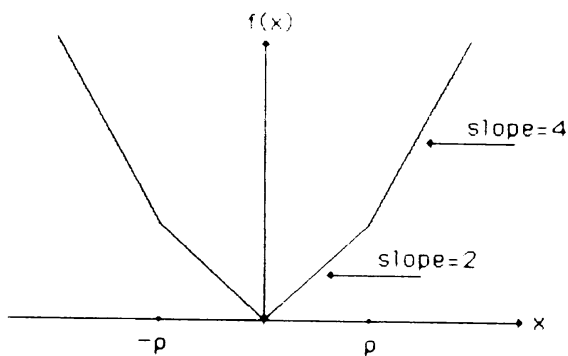


Fig. 1. PLC function.

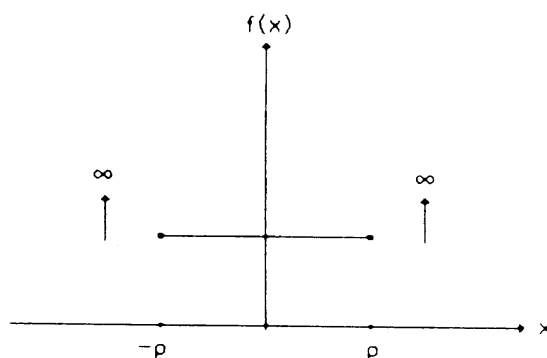


Fig. 2. PLC function expressing a magnitude constraint.

A continuación, se relatan las observaciones que debe cumplir  $f$  para que sea una función PLC en los puntos  $\Omega = \{\omega_y\}$ :

**OBSERVACIÓN 1:**  $f[x] > -\infty \forall x \in E_I$ . Esto es,  $f: E_I \rightarrow E_I \cup \{\infty\}$

**OBSERVACIÓN 2:** Si  $\omega_0 > -\infty$  entonces  $f$  es monótona y que no incrementa en  $(-\infty, \omega_0)$ .  
Si  $\omega_1 < \infty$  entonces  $f$  es monótona y no decreciente en  $(\omega_1, \infty)$ .

**OBSERVACIÓN 3:** Sea  $U \stackrel{\Delta}{=} [\omega_{-1}, \omega_0] \cap (-\infty, \infty)$ . Si  $U$  no está totalmente vacía entonces  $f$  contiene un valor mínimo en  $U$  y sólo en  $U$  (posiblemente infinito). Si  $U$  está vacío, entonces  $f$  no tiene mínimo.

**OBSERVACIÓN 4:** El conjunto en los cuales  $f$  es finita están englobados en  $E_1$ .

**OBSERVACIÓN 5:**  $f$  es evaluada finita  $\Leftrightarrow Y(\Omega) = -\infty$  y  $\sigma(\Omega) = \infty \Leftrightarrow f$  es monótona decreciente en  $(-\infty, \omega_1)$ , si el conjunto no está vacío, y si  $f$  es monótona creciente en  $(\omega_0, \infty)$ , si ese conjunto no está vacío.

**OBSERVACIÓN 6:** Si  $f'$  es PLC y  $f'' \stackrel{\Delta}{=} f + f'$  entonces  $f''$  es PLC.  $f''$  es un valor finito si tanto  $f'$  como  $f$  son valores finitos.

**TEOREMA 1:** En el contexto de las definiciones de  $x$ ,  $v$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $F$ , y  $V_x$  en la ec 2., tendremos que  $f$ ,  $g$  y  $h$  estarán centradas en torno a funciones PLC.  $f$  y  $g$  serán valores finitos con raíces en  $\Omega$  y  $\theta$ , respectivamente, y con  $\omega_1 = \omega_0 = 0$ .

$$x_{max} \stackrel{\Delta}{=} \max \{ \theta_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n \}$$

$$x_{min} \stackrel{\Delta}{=} \min \{ \theta_0, x_0, x_1, \dots, x_n \}$$

$$X \stackrel{\Delta}{=} \{ u \mid u \in E_{n+1}, x_{min} \leq u_i \leq x_{max}, i = 0, 1, \dots, n \}$$

Entonces  $V_x$  no está vacío,  $F(V_x, x)$  es finito y  $V_x \subset X$ .

### 1.3.- ÁLGEBRA DE LAS RAÍCES.

El álgebra de la celosía provee un álgebra de las raíces útil. Si  $\omega, \psi \in E_1 \cup \{-\infty, \infty\}$  entonces aquí su “meet” es  $\omega \wedge \psi = \min(\omega, \psi) \in E_1 \cup \{-\infty, \infty\}$  y su “join” vendrá dado por la expresión  $\omega \vee \psi = \max(\omega, \psi) \in E_1 \cup \{-\infty, \infty\}$ . “Meet” y “join” son conmutativas y asociativas y la “identidad absorción”, establece que

$$w \wedge (w \vee \psi) = w \vee (w \wedge \psi) = w$$

**OBSERVACIÓN 7:**  $\Omega$  es un conjunto de raíces y  $k' \geq k$ . Entonces  $\omega_k \wedge \omega_{k'} = \omega_k$  y  $\omega_k \vee \omega_{k'} = \omega_{k'}$ .

**TEOREMA 2:**  $f$  y  $f'$  son funciones PLC en los puntos  $\Omega$  y  $\Omega'$ , respectivamente  $f'' = f + f'$ . Entonces,  $f''$  es una función en los puntos  $\psi = \Omega \otimes \Omega'$ . Si  $f$  y  $f'$  tienen mínimos, entonces  $f''$  tiene un mínimo; si, por el contrario, uno de los mínimos de  $f$  y  $f'$  son finitos, entonces el mínimo de  $f''$  es finito.

**TEOREMA 3:**  $f$  y  $h$  son funciones PLC en los puntos  $\Omega$  y  $\psi$ , respectivamente.  $f$  y  $h$  tienen mínimos finitos ( $\omega_0$  y  $\psi_0$  son valores finitos). Considerando  $x \in E_1$ , el mínimo de la función PLC, cuyo valor estará en  $y \in E_1$  es  $f[y] + h[y-x]$ , es una función evaluada finita y continua definida por

$$y * [x] = \bigvee_{j=-\infty}^{\infty} [\omega_j \wedge (\psi_{-j} + x)]$$

Si

$$f'[x] = f[y * [x]] + h[y * [x] - x]$$

entonces  $f'$  es una función PLC en los puntos  $\Omega'$ , donde  $w'_i = \omega_i - \psi_{-1-i} \forall i$ .  $f'$  tiene un mínimo y si  $\psi_{-1} > -\infty$  entonces el mínimo es finito.

**OBSERVACIÓN 8:** Si  $\Omega$  y  $\Omega'$  son un conjunto de valores con  $\omega_i = -\infty$ , para  $i < K$ ,  $\omega_i = \infty$  para  $i \geq K \geq 0$ ,  $\omega'_i = -\infty$  para  $i < K'$ ,  $\omega'_i = \infty$  para  $i \geq K' \geq 0$ , y si  $\psi = \Omega \otimes \Omega'$  entonces  $\psi_i = -\infty$  para  $i < -(K + K')$  y  $\psi_i = \infty$  para  $i \geq (K + K')$ .

**OBSERVACIÓN 9:**  $\Omega$  y  $\Omega'$  son un conjunto de puntos con

$$\omega'_i = \begin{cases} \infty & \text{para } i \geq K' \geq 0 \\ x & \text{para } -K' \leq i \leq K' \\ -\infty & \text{para } i < -K' \end{cases}$$

y  $\Psi = \Omega \otimes \Omega'$ . Entonces

$$\psi_i = \omega_{-K'+i} \vee (x \wedge \omega_{K'+i}) = \text{med}(\omega_{-K'+i}, x, \omega_{K'+i})$$

**OBSERVACIÓN 10:** Definiendo  $f, \Omega, \psi, f', \Omega'$  como en el teorema 3, con

$$\psi_i = \begin{cases} \infty & \text{para } M \leq i \\ 0 & \text{para } -M \leq i < M \\ -\infty & \text{para } i < -M \leq 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\omega_i = \begin{cases} -\infty & \text{para } i < -M \\ \infty & \text{para } i \geq M \end{cases}$$

**OBSERVACIÓN 11:** Si es un conjunto de puntos, entonces la convolución en celosía con los puntos nulos  $\phi$  es una operación identidad:  $\Omega \otimes \phi = \phi \otimes \Omega = \Omega$ .

**OBSERVACIÓN 12:**  $f$  es una función PLC en los puntos nulos  $\phi$  si  $f$  es evaluada constante.

#### 1.4.- RESULTADOS EXPERIMENTALES

1) El suavizador de clase estándar recursiva (*SCR*) ha sido aplicado al caso de un canal inactivo, por ejemplo la secuencia de entrada  $\{x_i\}$  es puro ruido de expectativa cero. En cuanto la  $g$  del suavizador *SCR* sea cambiada de situación, tomando expectativa cero por las entradas perdidas no generalmente y los problemas de suavizado son entonces equivalentes al problema de determinar un parámetro localización.

La tabla I muestra resultados experimentales usando el suavizador *SCR*, con  $K = 1$  y  $\{x_i\}$  una secuencia de valores aleatorios gaussianos pseudoindependientes de varianza unitaria.

La tabla II muestra los resultados de los mismos datos con un traslado de mediana de longitud  $N + 1$ .

La tabla III y IV dan la misma información que la tabla I y II, respectivamente, con varianza unitaria con ruido exponencialmente distribuido sustituyendo el ruido gaussiano.

El suavizador *SCR* y el suavizador de mediana han sido preferido por diferentes razones. Consecuentemente, no es obvio que con valores de  $N + 1$  en la tabla II ( o la tabla IV), asociadas con un suavizador de mediana, se podrían elegir para comparación la ejecución de cualquier suavizador *SCR* con parámetros específicos  $M, n_a, n_b$  en la tabla I ( o tabla III, respectivamente). El siguiente acuerdo ha sido tomado:

Si un pulso rectangular de longitud  $L_p$  aparece en un canal inactivo sujeto a un suavizador de mediana, entonces la longitud máxima permitida al suavizador, si se detecta el pulso, será  $N + 1 = 2L_p - 1$ .

Si el suavizador *SCR* es aplicado a la misma secuencia y  $L_p$  es impar, entonces el valor máximo de  $M$  permitido es  $(L_p - 1)/2$ . Por tanto, el uso de alguna  $M$  específica en el suavizador *SCR*, podría ser comparado al uso de  $N = 4M$  en el filtro mediana, desde el punto de vista de la detección de un pulso rectangular.

Por tanto, en los casos donde  $M = 4$  en las tablas I y III puede ser comparado a los casos  $N + 1 = 17$  en las tablas II y IV. Es por ello, que un canal inactivo ejecutado en suavizadores *SCR* son claramente superior.

2) Los suavizadores *SCR* con  $M = 4$  fueron comparados a los suavizadores mediana de longitud  $N + 1 = 17$  en el problema de suavizado y detección referidos anteriormente. El suavizador *SCR* usado ha sido  $n_a = 48$  y  $n_b = 16$ . Los pulsos rectangulares de área unidad y

longitud  $L_p = 9$  fueron superpuestos en un canal inactivo con ruido gaussiano o exponencial. Idealmente, entonces las salidas de los suavizadores reproduciría los pulsos rectangulares.

3) El suavizador *SCR* ejecutado es bastante mucho mejor que el suavizador de mediana en términos de respuesta al impulso y que el ruido no era excesivo

4) Los datos que conciernen a la comparación experimental (desde el punto de vista de detección de pulso) *SCR* y suavizadores mediana parecen dar una preferencia al anterior, en términos de ejecución de canales inactivos de respuesta al impulso.

**TABLA 1**

**SUAVIZADOR STANDARD CLASE RECURSIVA. DATOS GAUSSIANOS.**

M	$n_a=20$ desv. stad.	$n_b=15$ desv. absol.	$n_a=20$ desv. stad.	$n_b=5$ desv. absol.
1	.558	.458	.552	.442
2	.380	.299	.397	.306
3	.232	.185	.187	.152
4	.162	.138	.150	.118

**TABLA 2**  
**SUAVIZADOR MEDIANA TRASLADADA. DATOS GAUSSIANOS.**

N+1	SUAVIZADOR MEDIANA		ASINTÓTICA TEÓRICA	MEDIA TEÓRICA TRASLACIÓN	
	std desv	abs desv	std desv	std desv	abs desv
3	.646	.528	.724	.577	.461
5	.553	.450	.560	.447	.357
7	.478	.387	.474	.378	.302
9	.429	.342	.418	.333	.266
11	.400	.315	.378	.302	.241
13	.344	.274	.348	.277	.221
15	.325	.264	.324	.258	.206
17	.299	.239	.304	.243	.194

**TABLA 3**  
**SUAVIZADOR STANDARD CLASE RECURSIVA. DATOS  
EXPONENCIALMENTE DISTRIBUIDOS.**

M	n <sub>a</sub> =20	n <sub>b</sub> =15	n <sub>a</sub> =20	n <sub>b</sub> =5
	desv. stad.	desv. absol.	desv. stad.	desv. absol.
1	.371	.261	.389	.270
2	.236	.174	.246	.175
3	.159	.125	.135	.110
4	.118	.084	.100	.078



**TABLA 4**  
**SUAVIZADOR MEDIANA TRASLADADA. DATOS EXPONENCIALMENTE**  
**DISTRIBUIDOS.**

N+1	SUAVIZADOR MEDIANA		ASINTÓTICA TEÓRICA	MEDIA TEÓRICA
	std desv	abs desv	std desv	TRASLACIÓN std desv
3	.484	.352	.408	.577
5	.392	.283	.316	.447
7	.328	.241	.267	.378
9	.292	.223	.234	.333
11	.264	.203	.213	.302
13	.242	.182	.196	.277
15	.218	.164	.183	.258
17	.195	.150	.171	.243